



חוברת הדרכה דיגיטלית במתמטיקה למסלול 12 שנ"ל

שנת תשפ"א – 2020-2021

בנושא סדרה חשבונית - למורה

יצירה: אידן שחם

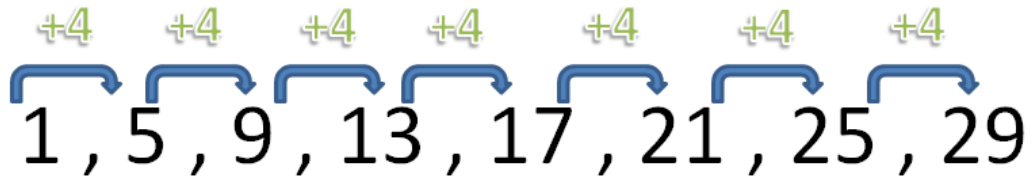
תוכן עניינים:

1. היכרות עם סדרה חשבונית.....2
2. הפרש הסדרה.....3
3. מיקום איבר בסדרה.....5
4. סכום סדרה חשבונית.....7
5. מציאת איבר בסדרה חשבונית.....9
6. הכנסת איברים ליצירת סדרה חשבונית.....12
7. מבחן ביניים.....17
8. סדרה חשבונית בצורת בעיה מילולית.....19
9. מבחן מסכם.....24

1. היכרות עם סדרה חשבונית

מהי סדרה חשבונית?

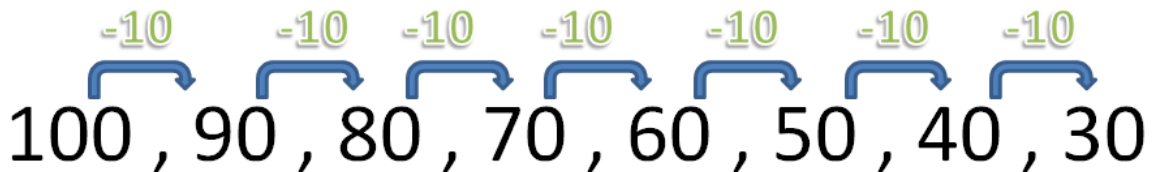
סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים, שבה ההפרש בין כל שני מספרים עוקבים הוא קבוע.
למשל:



בסדרה זו אפשר לראות שיש קפיצות קבועות בין המספרים, ולכן זוהי סדרה חשבונית.

במקרה זה, ערך האיברים עולה, ולכן זוהי **סדרה חשבונית עולה**

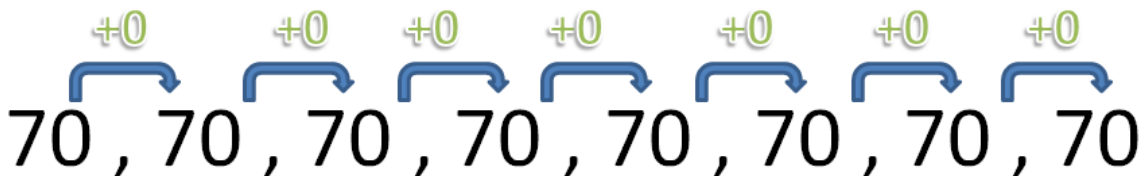
נסתכל על עוד סדרה:



בסדרה זו אפשר לראות שיש קפיצות קבועות בין המספרים, ולכן היא גם סדרה חשבונית.

במקרה זה, ערך המספרים יורד, ולכן זוהי **סדרה חשבונית יורדת**

ולבסוף, נסתכל על סדרה נוספת:



בסדרה זו אפשר לראות שיש קפיצות קבועות בין המספרים, ולכן היא גם סדרה חשבונית.

במקרה זה, ערך המספרים נשאר קבוע, ולכן זוהי **סדרה חשבונית קבועה**

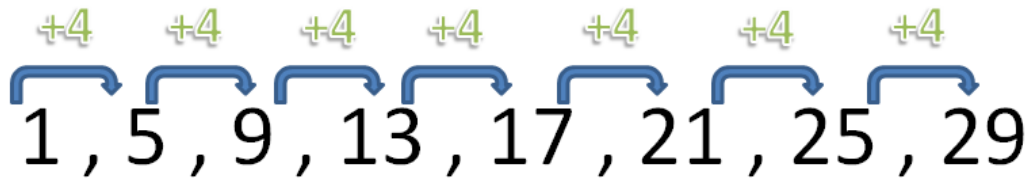
סרטון 1

2. הפרש הסדרה

לכל סדרה יש הפרש קבוע בין המספרים.

הפרש זה יכול להיות שלילי, חיובי או קבוע - כפי שראינו בפרק הקודם.

נסתכל על הסדרה הבאה:

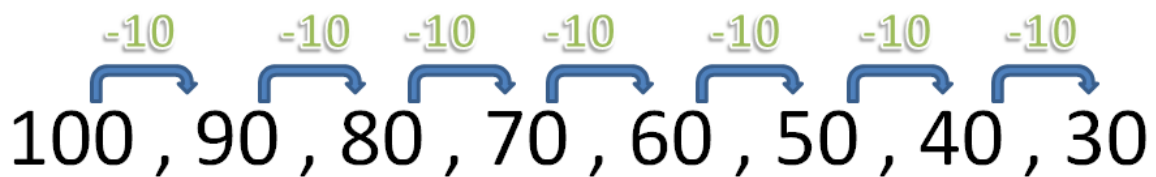


בסדרה זו יש הפרש קבוע בין המספרים – +4

נהוג לסמן את הפרש הסדרה באות d.

ולכן, במקרה שלנו $d = 4$

נסתכל על עוד סדרה:



בסדרה זו יש הפרש קבוע בין המספרים – -10

נהוג לסמן את הפרש הסדרה באות d.

ולכן, במקרה שלנו $d = -10$

סרטון 1

תרגול:

מצאו את הפרש הסדרות הבאות (מצאו את d):

א.

1, 3, 5, 7, 9, 11

d = _____

ב.

7, 10, 13, 16, 19

d = _____

ג.

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

d = _____

ד.

20, 16, 12, 8, 4, 0

d = _____

הערה לסעיפים הבאים: קו ריק אומר שקיים שם איבר אך הוא לא ידוע

ה.

98, __, 82, __, __, 58

d = _____

ו.

5, __, __, __, 25

d = _____

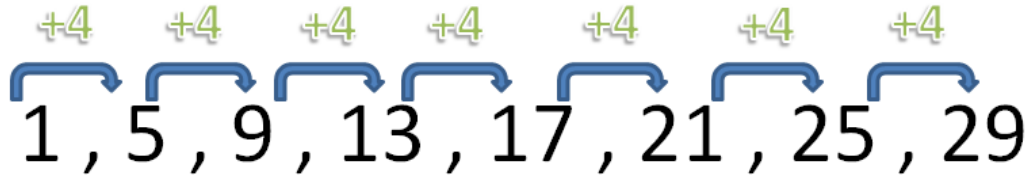
פתרונות:

א) 2 ב) 3 ג) 9 ד) -4 ה) -8 ו) 5

3. מיקום איבר בסדרה

לכל איבר בסדרה יש מיקום סידורי.

נסתכל על הסדרה הבאה:



האיבר הראשון הוא 1, השני 5, השלישי 9, וכך הלאה.

נהוג לסמן את האיברים באופן הבא:

a_1 – האיבר הראשון

a_2 – האיבר השני

a_3 – האיבר השלישי

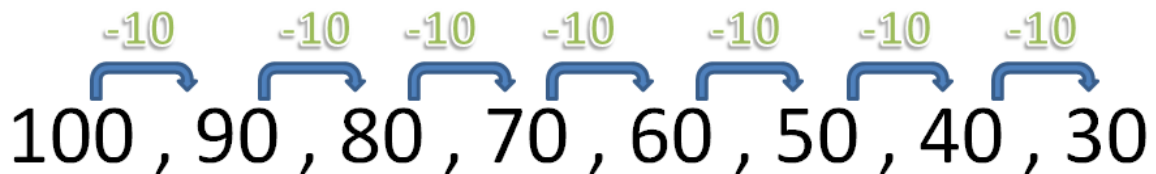
a_4 – האיבר הרביעי

וכך הלאה...

אם למשל: $a_5=17$

אז המשמעות היא - שהאיבר החמישי בסדרה שווה 17 (כפי שאפשר לראות בסדרה למעלה)

נסתכל על עוד סדרה:



האיבר הראשון הוא 100, השני 90, השלישי 80, וכך הלאה.

נוכל לראות ש:

$$a_1 = 100$$

$$a_2 = 90$$

$$a_3 = 80$$

$$a_7 = 40$$

תרגול:

מצאו את ערך האיבר לפי מיקומו:

א.

1, 3, 5, 7, 9, 11

$$a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ב.

7, 10, 13, 16, 19

$$a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ג.

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

$$a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ד.

77, 70, 63, 56, 49, 42, 35

$$a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

פתרונות:

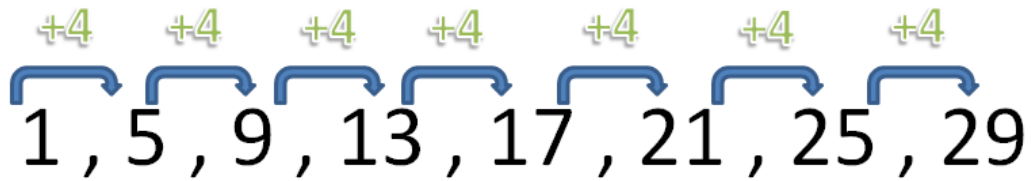
5 (א)

10 (ב)

64 (ג)

49 (ד)

4. סכום סדרה חשבונית



- לפעמים מבקשים את סכום כל הסדרה, או סכום של איברים ספציפיים.
נהוג לסמן סכום באות **S**
למשל:

בסדרה כעת יש 8 איברים, ולכן סכום כל הסדרה הוא:

$$S_8 = 1+5+9+13+17+21+25+29 = 120$$

מהו סכום 5 האיברים הראשונים?

$$S_5 = 1+5+9+13+17 = 45$$

מהו סכום 5 האיברים האחרונים?

$$S = 13+17+21+25+29 = 105$$

תרגול:

מצאו את סכום האיברים:

7, 10, 13, 16, 19

א. מצאו את סכום 2 האיברים הראשונים:

$$S_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

ב. מצאו את סכום 8 האיברים הראשונים:

$$S_8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ג. מצאו את סכום 4 האיברים האחרונים:

$$S = \underline{\hspace{2cm}}$$

פתרונות:

17 (א)

260 (ב)

346 (ג)

5. מציאת איבר בסדרה חשבונית

לעיתים נדרש למצוא איבר כלשהו בסדרה חשבונית נתונה.

דוגמא 1:

15, 20, 25, 30, __, __, __, __

ידוע שהפרש הסדרה הוא $d = 5$.
מצאו את האיבר השמיני בסדרה (מצאו את a_8)
איך נעשה זאת?
נשלים את הסדרה עד שנגיע לאיבר השמיני!

15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

וגילינו שהאיבר השמיני הוא $a_8 = 50$!

דוגמא 2:

66, 55, 44, 33, __, __

ידוע שהפרש הסדרה הוא $d = -11$.
מצאו את האיבר השישי בסדרה (מצאו את a_6)
איך נעשה זאת?
נשלים את הסדרה עד שנגיע לאיבר השישי!

66, 55, 44, 33, 22, 11

וגילינו שהאיבר השישי הוא $a_6 = 11$!

דוגמא 3:

1, 4, 7, 10, __, __

ידוע שהפרש הסדרה הוא $d = 3$.
א. שאלה: האם קיים איבר בסדרה שערכו 31?
פתרון: נשלים את הסדרה עד שנראה זאת:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31

ב. שאלה: מהו מיקומו הסידורי של המספר 52?

פתרון: נשלים את הסדרה עד שנראה איפה איבר זה נמצא:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52

ולכן: $a_{18} = 52$, (מיקום המספר 52 הוא: 18)

תרגול:

מצאו את האיברים הבאים:

א. מצאו את האיבר השישי (מצאו את a_6)

5, 7, 9, __, __, __

ב. מצאו את האיבר השלישי (מצאו את a_3)

97, 76, ____

ג. מצאו את האיבר התשיעי (מצאו את a_9)

10, 11, __, __, __, __, __, __, __

ד. מצאו את מיקומו הסידורי של המספר 14

1, 2, __, __, __, __, __, __, __

ה. האם קיים איבר בסדרה שערכו 61?

5, 13, __, __, __, __, __, __

ו. מצאו את מיקומו הסידורי של המספר 72

2, 9, __, __, __, __, __, __

ז. האם קיים איבר בסדרה שערכו 100?

67, 77, __, __, __, __, __, __

פתרונות:

$$a_6 = 15 \text{ (א)}$$

$$a_3 = 55 \text{ (ב)}$$

$$a_9 = 18 \text{ (ג)}$$

$$a_{14} = 14 \text{ (ד)}$$

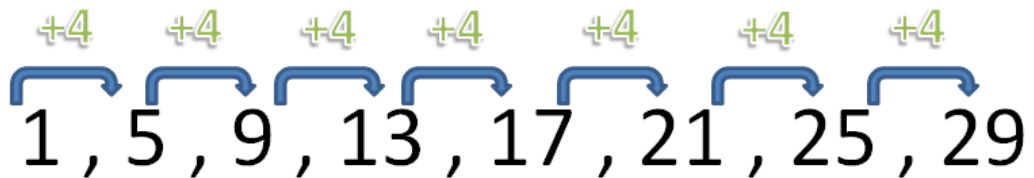
$$a_8 = 61 \text{ (ה)}$$

$$a_9 = 72 \text{ (ו)}$$

$$\text{לא (ז)}$$

6. הכנסת איברים ליצירת סדרה חשבונית

ראשית, נסתכל על קפיצות בין איברים בסדרה החשבונית הבאה:



שימו לב:

הפרש הסדרה = 3 ($d=4$)

האיבר הראשון = 1 ($a_1=1$)

ניתן לראות שאפשר להגיע מאיבר מסוים לאיבר שנמצא כמה מקומות אחריו רק באמצעות האיבר הראשון והפרש הסדרה

למשל:

אפשר להגיע לאיבר השני (5) על ידי חיבור האיבר הראשון ופעם אחת הפרש הסדרה.

$$a_2 = \underline{a_1 + 1*d} = 1 + 1*4 = 5$$

אפשר להגיע לאיבר הרביעי (13) על ידי חיבור האיבר הראשון ו-3 פעמים הפרש הסדרה.

$$a_4 = \underline{a_1 + 3*d} = 1 + 3*4 = 13$$

אפשר להגיע לאיבר השישי (21) על ידי חיבור האיבר הראשון ו-5 פעמים הפרש הסדרה.

$$a_6 = \underline{a_1 + 5*d} = 1 + 5*4 = 21$$

אפשר להגיע לאיבר השמיני (29) על ידי חיבור האיבר הראשון ו-7 פעמים הפרש הסדרה.

$$a_8 = \underline{a_1 + 7*d} = 1 + 7*4 = 29$$

כל פעם שהיינו צריכים להגיע לאיבר מסוים,

הוספנו לאיבר הראשון את הפרש הסדרה - מספר מסוים של פעמים.

איך נדע כמה פעמים נצטרך להוסיף את הפרש הסדרה (d) לאיבר הראשון (a_1)?

לפי מיקום האיבר שאותו אנחנו מחפשים, פחות אחד.

למשל:

- אם אנחנו מחפשים את האיבר ה-7, עלינו להוסיף לאיבר הראשון 6 פעמים את הפרש הסדרה.
- אם אנחנו מחפשים את האיבר ה-12, עלינו להוסיף לאיבר הראשון 11 פעמים את הפרש הסדרה.
- אם אנחנו מחפשים את האיבר ה-20, עלינו להוסיף לאיבר הראשון 19 פעמים את הפרש הסדרה.
- אם אנחנו מחפשים את האיבר ה-25, עלינו להוסיף לאיבר הראשון 24 פעמים את הפרש הסדרה.

לדוגמא:

$$a_{23} = a_1 + 22d$$

$$a_{27} = a_1 + 26d$$

$$a_{67} = a_1 + 66d$$

תרגול:

$$a_2 =$$

$$a_6 =$$

$$a_9 =$$

$$a_{14} =$$

פתרונות:

$$.1 \quad a_1 + d$$

$$.2 \quad a_1 + 5d$$

$$.3 \quad a_1 + 8d$$

$$.4 \quad a_1 + 13d$$

כעת, ניגש לנושא המרכזי של פרק זה.
איך נדע אילו מספרים להוסיף, בין מספרים נתונים, כך שתתקבל סדרה חשבונית?
פשוט נשמור על החוקיות של סדרה חשבונית.

למשל:

1. נתונים המספרים 1 ו-7. הכניסו בין שני מספרים אלו שני מספרים נוספים כך שתתקבל סדרה חשבונית.

1, _____, _____, 7

אם זו סדרה חשבונית, אז 1 הוא האיבר הראשון ו-7 הוא האיבר הרביעי.

ולכן:

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$7 = 1 + 3d$$

$$6 = 3d$$

$$3d = 6$$

$$d = 2$$

כעת אנו יודעים שהפרש הסדרה הוא 2, ונוכל להשלים את האיברים החסרים.

2. נתונים המספרים 20 ו-48. הכניסו בין שני מספרי אלו שלושה מספרים נוספים כך שתתקבל סדרה חשבונית.

20, _____, _____, _____, 48

אם זו סדרה חשבונית, אז 20 הוא האיבר הראשון ו-48 הוא האיבר החמישי.

ולכן:

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$48 = 20 + 4d$$

$$28 = 4d$$

$$4d = 28$$

$$d = 7$$

כעת אנו יודעים שהפרש הסדרה הוא 7, ונוכל להשלים את האיברים החסרים.

תרגול:

1. נתונים המספרים 3 ו- 8. הכניסו בין שני מספרים אלו ארבעה מספרים נוספים כך שכל ששת המספרים יהוו סדרה חשבונית
2. נתונים המספרים 10 ו- 70. הכניסו בין שני מספרים אלו חמישה מספרים נוספים כך שבעת המספרים יהוו סדרה חשבונית
3. נתונים המספרים 26 ו- 70. הכניסו בין שני מספרים אלו שלושה מספרים נוספים כך שכל חמשת האיברים יהוו סדרה חשבונית

פתרונות:

1. 3, 4, 5, 6, 7, 8
2. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70
3. 26, 37, 48, 59, 70

7. מבחן ביניים

1. בסדרה חשבונית יש 12 איברים. האיבר השישי הוא 7, והאיבר השמיני הוא 13.
 - א. מצא את הפרש הסדרה.
 - ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 - ג. מצא את סכום הסדרה.

2. בסדרה חשבונית יש 16 איברים. האיבר השלישי בסדרה הוא 8. הפרש הסדרה הוא 2.
 - א. מצא את האיבר ה-12 בסדרה.
 - ב. מצא את האיבר ה-16 בסדרה.
 - ג. חשב את הסכום של 5 האיברים האחרונים בסדרה.

3. בסדרה חשבונית נתונים שני איברים : $a_3=73$, $a_4=77$
 - א. מצא את הפרש הסדרה.
 - ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 - ג. 101 הוא איבר בסדרה. מהו מיקומו בסדרה?

4. נתונים המספרים 27 ו- 69. הכניסו בין שני מספרים אלו חמישה מספרים נוספים כך שכל שבעת המספרים יהוו סדרה חשבונית

פתרונות:

1. $S_{12} = 102$ (ג) $a_1 = -8$ (ב) $d = 3$ (א)

2. 150 (ג) $a_{16} = 34$ (ב) $a_{12} = 26$ (א)

3. $n = 10$ (ג) $a_1 = 65$ (ב) $d = 4$ (א)

4. $27, \underline{34}, \underline{41}, \underline{48}, \underline{55}, \underline{62}, 69$

8. סדרה חשבונית בצורת בעיה מילולית

נפתור תרגילים בסדרה חשבונית בצורת בעיה מילולית בדיוק באותו אופן,

עם כל הכלים שרכשנו עד כה (פרקים 1-6).

על מנת לפתור תרגילים מסוג זה – נציג את הבעיה המילולית כסדרה חשבונית.

למשל:

1. עובד היי-טק מרוויח 20,000 ₪ בחודש. לאחרונה העובד התלונן למנהל שלו בגלל השכר הנמוך שמקבל (ביחס לעבודה הקשה שמשקיע). המנהל החליט, בשל חיוניות העובד, שהחל מחודש פברואר יוסיפו לעובד 1,000 ₪ נוספים עבור כל חודש (בפברואר יקבל 21,000 ₪, במרץ יקבל 22,000 ₪ וכך הלאה).
 - א. מצאו כמה ירוויח העובד בחודש אוגוסט
 - ב. חשבו כמה הרוויח העובד בארבעת החודשים האחרונים (ספטמבר-דצמבר)

פתרון:

ראשית, נציג את הנתונים כסדרה חשבונית.

האיבר הראשון הוא 20,000 ₪ והפרש הסדרה 1,000 ₪. יש לנו 12 איברים.

לכן:

20,000, 21,000, 22,000, 23,000, 24,000, 25,000, 26,000, 27,000, 28,000, 29,000, 30,000, 31,000

אחרי שהצגנו את הבעיה המילולית כסדרה חשבונית – אפשר לפתור

- א. בחודש אוגוסט (האיבר השמיני בסדרה) העובד ירוויח 27,000 ₪
- ב. את ארבעת החודשים האחרונים נקבל מחיבור ארבעת האיברים האחרונים. העובד ירוויח 118,000 ₪.

2. משה החליט שהוא צריך להתחיל לרוץ בשביל לשמור על בריאותו.
ביום הראשון רץ 4 ק"מ , ובכל יום רץ 2 ק"מ יותר מביום הקודם לו.
א. כמה ק"מ רץ ביום השביעי?
ב. כמה ק"מ רץ משה במשך עשרת הימים הראשונים?

פתרון:

ראשית, נציג את הנתונים כסדרה חשבונית

האיבר הראשון הוא 4 ק"מ והפרש הסדרה 2 ק"מ.

לכן:

4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22

אחרי שהצגנו את הבעיה המילולית בסדרה חשבונית – אפשר לפתור

- א. ניתן לראות שהאיבר השביעי (שהוא מייצג כמה ק"מ משה רץ ביום השביעי) הוא 16.
ב. נחבר את כל עשרת האיברים בסדרה.

$$4+6+8+10+12+14+16+18+20+22 = 130$$

גילינו שמשה רץ סך הכל 130 ק"מ בכל עשרת הימים.

3. באולם קולנוע יש 8 שורות. בשורה הראשונה יש 5 כיסאות, ומספר הכיסאות בכל שורה גדול ב – 3 ממספר הכיסאות שבשורה שלפניה.

א. כמה כיסאות יש בשורה השישית?

ב. כמה כיאות יש באולם?

פתרון:

ראשית, נציג את הנתונים כסדרה חשבונית

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

האיבר הראשון = מספר הכיסאות בשורה הראשונה

האיבר השני = מספר הכיסאות בשורה השנייה

וכך הלאה...

אחרי שהצגנו את הבעיה המילולית בסדרה חשבונית – אפשר לפתור

א. בשורה השישית 20 כיסאות

ב. נחבר את כל האיברים בסדרה.

$$5+8+11+14+17+20+23+26 = 124$$

גילינו שיש סך הכל 124 כיסאות באולם.

4. סולם עם 5 שלבים בנוי כך שכל שלב בסולם קצר ב – 2 ס"מ מהשלב שמתחתיו.

אורך השלב התחתון הוא 10 ס"מ

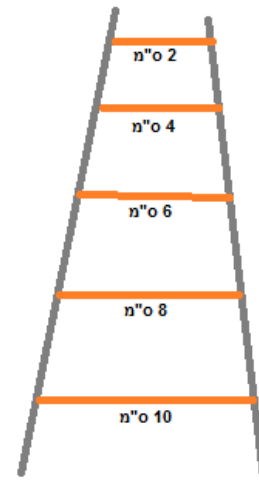
א. חשב את אורך השלב השני מלמטה

ב. חשבו את אורך השלב השני מלמעלה

פתרון:

ראשית, נציג את הנתונים כסדרה חשבונית

10, 8, 6, 4, 2



אחרי שהצגנו את הבעיה המילולית בסדרה חשבונית – אפשר לפתור

א. אורך השלב השני מלמטה הוא 8 ס"מ

ב. אורך השלב השני מלמעלה הוא 4 ס"מ

תרגול:

1. המשכורת ההתחלתית של פועל הייתה 3,500 שקלים לחודש. בכל חודש עלתה משכורתו ב- 50 שקלים.
א. מה הייתה משכורתו של הפועל בחודש ה- 12 לעבודתו?
ב. כמה השתכר הפועל במשך 12 החודשים הראשונים לעבודתו?
2. סולם עם 10 שלבים בנוי כך שכל שלב בסולם קצר ב- 4 ס"מ מהשלב שמתחתיו.
אורך השלב התחתון 60 ס"מ.
א. חשב את אורך השלב החמישי מלמטה.
ב. חשב את אורך השלב החמישי מלמעלה.
3. דוד התאמן לקראת מרוץ אופניים. ביום הראשון של האימון רכב 25 ק"מ, ובכל יום רכב 3 ק"מ יותר משרכב ביום הקודם לו.
ג. כמה ק"מ רכב דוד ביום ה-30 של האימון?
ד. כמה ק"מ רכב דוד במשך 30 הימים הראשונים של האימון?
4. באולם יש 15 שורות של כיסאות. בשורה הראשונה יש 12 כיסאות, ומספר הכיסאות בכל שורה גדול ב 2 ממספר הכיסאות שבשורה שלפניה.
א. כמה כיסאות יש באולם?
ב. כמה כסאות יש בשורה השביעית?

פתרונות:

1. (א) 4050 שקלים (ב) 45,300 שקלים
2. (א) 44 ס"מ (ב) 40 ס"מ
3. (א) $a_{30} = 112$ ק"מ (ב) $S_{30} = 2,055$ ק"מ
4. (א) 390 כיסאות (ב) $a_7 = 24$

9. מבחן מסכם

1. בסדרה חשבונית 20 איברים. האיבר השלישי בסדרה הוא 8. הפרש הסדרה הוא 3.
 - א. חשב את האיבר השישה-עשר בסדרה.
 - ב. חשב את האיבר העשרים בסדרה.
 - ג. חשב את סכום חמשת האיברים האחרונים בסדרה.

2. נתונים המספרים 26 ו-74. בין שני מספרים אלה יש להכניס חמישה מספרים נוספים כך שכל שבעת המספרים יהוו סדרה חשבונית. מצא את חמשת המספרים שיש להכניס. הסבר כיצד מצאת את הפרש הסדרה.

3. סולם עם 10 שלבים בנוי כך שכל שלב בסולם קצר ב-4 ס"מ מהשלב שמתחתיו.
 - אורך השלב התחתון 50 ס"מ.
 - ה. חשב את אורך השלב החמישי מלמטה.
 - ו. חשב את אורך השלב החמישי מלמעלה.

4. באולם יש 15 שורות של כיסאות. מספר הכיסאות בכל שורה גדול ב-3 ממספר הכיסאות שבשורה שלפניה. בשורה הראשונה יש 14 כיסאות.
 - א. כמה כיסאות יש בשורה ה-15?
 - ב. כמה כיסאות יש באולם סך הכול?

5. בסדרה חשבונית האיבר השלישי הוא 6, והאיבר החמישי הוא 10.
 - א. מצא את הפרש הסדרה.
 - ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 - ג. בסדרה זו 13 איברים. מצא את סכום איברי הסדרה.

6. נתונים שלושה איברים סמוכים של סדרה חשבונית: $0, 7, 14, \dots$
 - א. מצא את מיקומו הסידורי של המספר 77
 - ב. האם קיים בסדרה איבר שערכו 53?

7. בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 40 והאיבר השמיני הוא 46.
 - א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 - ב. מצא את הסכום של חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

פתרונות:

265 (ג) $a_{20} = 59$ (ב) $a_{16} = 47$ (א) .1

26 , 34 , 42 , 50 , 58 , 66 , 74 .2

n"o 30 (ב) n"o 34 (א) .3

525 (ב) $a_{15} = 56$ (א) .4

182 (ג) $a_1 = 2$ (ב) $d = 2$ (א) .5

א לא (ב) $a_{12} = 77$ (א) .6

$S_5 = 155$ (ב) $a_1 = 25$ (א) .7