חוברת הדרכה דיגיטלית במתמטיקה למסלול 12 שנ"ל

دروس محوسبة في الرياضيات مستوى 12 سنوات تعليمية

שנת תשפ"א – 2020-2021

בנושא סדרה חשבונית- למורה

في موضوع المتواليات الحسابية - للمعلم

إعداد: إيدان شحام

فهرس المحتويات:

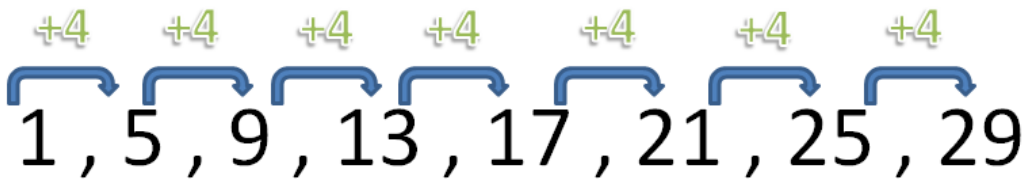
1. التعرف على المتوالية الحسابية.....2
2. فرق المتوالية.....3
3. مكان الحد في المتوالية.....5
4. مجموع متوالية حسابية.....7
5. ايجاد الحد في المتوالية الحسابية.....9
6. ادخال الحدود لإنشاء متوالية حسابية.....12
7. اختبار.....17
8. مسائل كلامية في موضوع المتواليات الحسابية.....19
9. امتحان نهائي.....24

1. التعرف على المتوالية الحسابية

ما هي متوالية حسابية؟

المتوالية الحسابية مكونة من مجموعة أعداد، الفرق بين كل عدد وما قبله ثابت دائما.

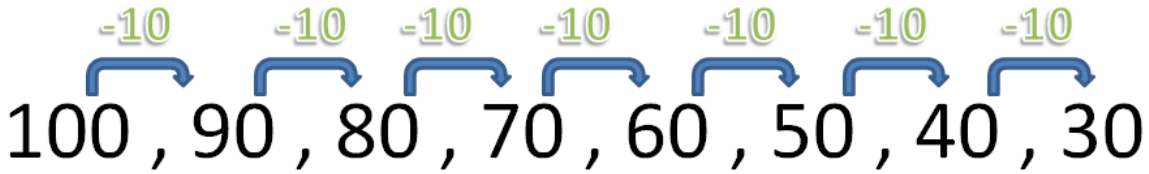
مثال:



في هذه المتوالية نرى قفزات ثابتة بين الأعداد لذا فهذه متوالية حسابية.

في هذه الحالة، قيمة الحدود تكبر، لذلك هذه **متوالية تصاعدية.**

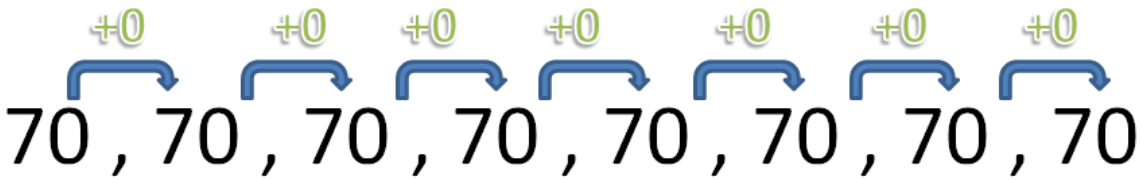
دعونا نلقي نظرة على متوالية أخرى:



في هذه المتوالية نرى قفزات ثابتة بين الأعداد لذا فهذه متوالية حسابية.

في هذه الحالة، قيمة الحدود تصغر، لذلك هذه **متوالية تنازلية.**

وأخيرًا، لنلقي نظرة على متوالية أخرى:



في هذه المتوالية نرى قفزات ثابتة بين الأعداد لذا فهذه متوالية حسابية.

في هذه الحالة، قيمة الحدود تبقى ثابتة، لذلك هذه **متوالية ثابتة.**

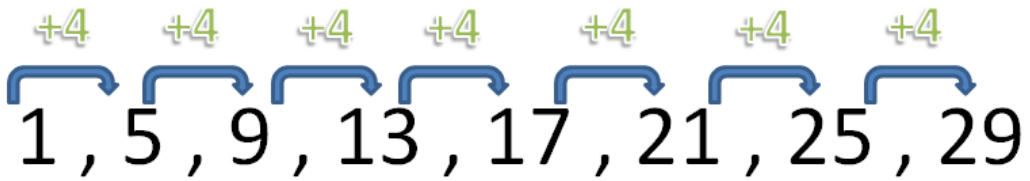
فيديو 1

2. فرق المتوالية

لكل متوالية فرق ثابت بين الأعداد.

يمكن أن يكون هذا الفرق سلبيًا أو إيجابيًا أو ثابتاً - كما رأينا في الفصل السابق.

دعونا نلقي نظرة على المتوالية التالية:

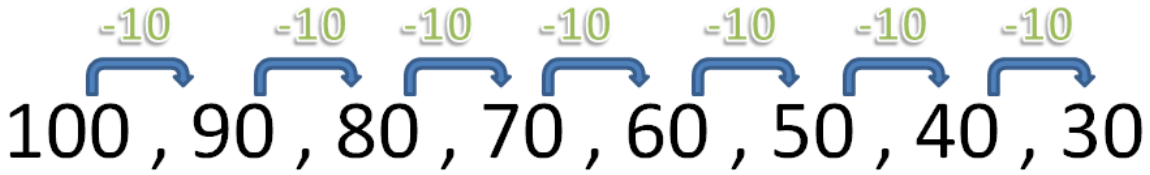


لهذه المتوالية فرق ثابت بين الأعداد– 4+

من المعتاد تعريف الفرق في المتوالية بواسطة الحرف d.

لذلك، في هذه الحالة **d = 4**

دعونا نلقي نظرة على متوالية اخرى:



لهذه المتوالية فرق ثابت بين الأعداد – 10-

من المعتاد تعريف الفرق في المتوالية بواسطة الحرف d.

لذلك، في هذه الحالة **d = -10**

فيديو 1

تمارين:

جدوا الفرق في المتواليات التالية (جدوا d) :

أ.

1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11

d =_____

ب.

7, 10, 13, 16 , 19

d = _____

ج.

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

d = _____

د.

20 , 16 , 12 , 8 , 4 , 0

d = _____

ملاحظة بالنسبة للبنود التالية: خط فارغ يعنى أن هناك حداً لكنه غير معروف.

ه.

98 , ____ , 82 , _____ , ____ , 58

d = _____

و.

5, ____, _____, _____, 25

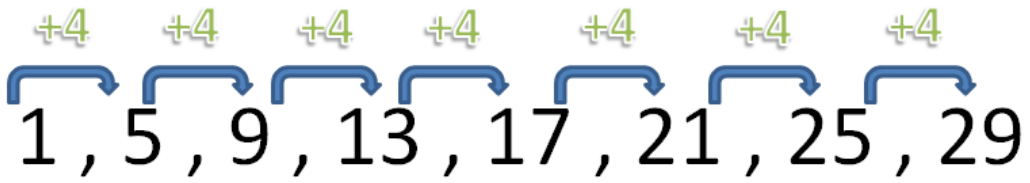
d = _____

حلول:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 9 (د) 4- (ه) 8- (و) 5

3. مكان الحد في المتوالية

دعونا نلقي نظرة على المتوالية التالية:



الحد الاول هو 1، والحد الثاني 5، الحد الثالث 9، وهكذا.

من المعتاد تعليم الحدود بالشكل التالي:

a1 –الحد الأول

a2 –الحد الثاني

a3 –الحد الثالث

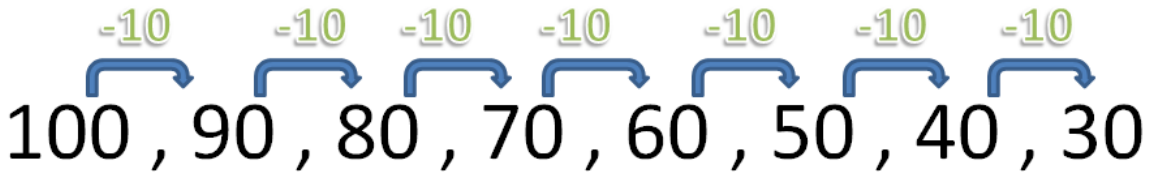
a4 –الحد الرابع

وهكذا..

فمثلاً لو: $a_{5=17}$

هذا يعني – ان الحد الخامس في المتوالية هو 17 (كما نراه في المتوالية أعلاه)

دعونا نلقي نظرة على متوالية اخرى:



الحد الأول هو 100, الثاني 90, الثالث 80, وهكذا.

ممكن أن نري:

$a_1 = 100$

$a_2 = 90$

$a_3 = 80$

$a_7 = 40$

تمارين:

جدوا قيمة الحد حسب مكانه:

أ.

1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11

a3 =_____

ب.

7, 10, 13, 16 , 19

a2 = _____

ج.

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

a8 = _____

د.

77 , 70 , 63 , 56 , 49 , 42 , 35

a5 = _____

الحلول:

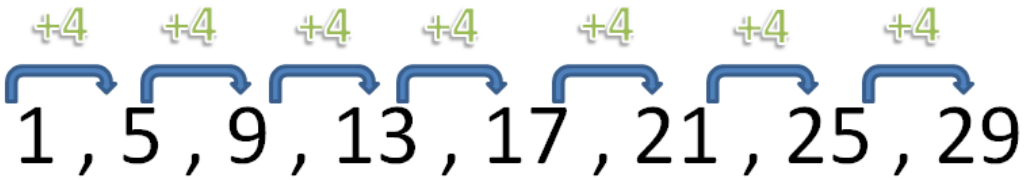
(أ) 5

(ب) 10

(ج) 64

(د) 4

4. مجموع متوالية حسابية



- أحياناً يُطلب منا أن نجد مجموع حدود كل المتوالية، أو مجموع حدود معينة.

من المعتاد التعريف عن المجموع بواسطة الحرف S

مثال:

يوجد في المتوالية 8 حدود, لذلك **مجموع كل المتوالية** هو :

$$S_8 = 1+5+9+13+17+21+25+29 = 120$$

ما هو مجموع 5 الحدود **الاولى**؟

$$S_5 = 1+5+9+13+17 = 45$$

ما هو مجموع 5 الحدود **الأخيرة**؟

$$S = 13+17+21+25+29 = 105$$

تمارين:

جدوا مجموع الحدود:

7, 10, 13, 16 , 19

أ. جدوا مجموع الحدين الأولين:

S_2 = ____

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

ب. جدوا مجموع 8 الحدود الأولى:

S_8 = _____

ج. جدوا مجموع 4 الحدود الأخيرة:

S = _____

حلول:

(أ) 17

(ب) 260

(ج) 346

5. ايجاد الحد في المتوالية الحسابية

احياناً يطلب منا ايجاد حد معين في متوالية حسابية معطاة.

مثلاً، معطاة المتوالية:

15, 20, 25, 30, ____, ____, ____, _____

من المعروف أن فرق المتوالية هو 5 (d = 5).
جدوا الحد الثامن في المتوالية (جدوا a_8)
كيف نفعل ذلك؟
نكمل المتوالية حتى نصل الحد الثامن!

15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

واكتشفنا أن الحد الثامن هو 50! ($a_8 = 50$)

مثال اخر:

66, 55 , 44 , 33 , ____ , _____

من المعروف أن فرق المتوالية هو 11- (d = -11).
جدوا الحد السادس في المتوالية (جدوا a_6)
كيف نفعل ذلك؟
نكمل المتوالية حتى نصل الحد السادس !

66, 55 , 44 , 33 , 22 , 11

واكتشفنا أن الحد السادس هو 11 ! ($a_6 = 11$)

مثال 3:

1, 4 , 7 , 10 , ____ , _____

معلوم أنّ فرق المتوالية هو 3 (d = 3).

أ. سؤال: هل يوجد في هذه المتوالية حد يساوي 31؟
الحل: نكمل المتوالية حتى نرى ما يلي:

1, 4 , 7 , 10 , 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31

ب. سؤال: ما هو الموقع التسلسلي للعدد 52؟
الحل: نكمل المتوالية حتى نرى موقع هذا العدد:

1, 4 , 7 , 10 , 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52

لذلك: $a_{18} = 52$، (موقع العدد 52 هو: 18)

تمارين:

جدوا الحدود الاتية:

أ. جدوا الحد السادس (جدوا a_6)

5 , 7 , 9 , ___ , ___ , ____

ب. جدوا الحد الثالث (جدوا a_3)

97, 76 , _____

ج. جدوا الحد التاسع (جدوا a_9)

10 , 11 , ____ , ____, ____ , ____ , ____ , ____, _____

د. جد الموقع التسلسلي للعدد 14.

1, 2 , ____ , ____, ____ , ____ , ____ , ____, _____

ه. هل يوجد حد في هذه المتوالية قيمته 61؟

5 , 13 , ____ , ____, ____ , ____ , ____ , ____, ____

و. جد الموقع التسلسلي للعدد 72.

2 , 9 , ____ , ____, ____ , ____ , ____ , ____, _____

ز. هل يوجد حد في هذه المتوالية قيمته 100؟

67 , 77 , ____ , ____, ____ , ____ , ____ , ____, _____

حلول:

أ. $a_6 = 15$

ب. $a_3 = 55$

ج. $a_9 = 18$

أ. $a_{14} = 14$

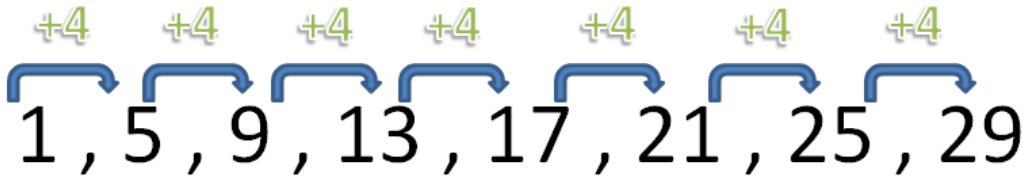
ب. $a_8 = 61$

ج. $a_9 = 72$

د. لا

6. ادخال الحدود لإنشاء متوالية حسابية

في البداية، لنلقي نظرة على القفزات بين الحدود في المتوالية التالية



انتبهوا :

فرق المتوالية = 3 ($d=4$)

الحد الاول = 1 ($a_1=1$)

يمكننا أن نرى أنه يمكننا الوصول من حد معين إلى حد اخر يليه ببضعة قفزات باستخدام الحد الأول وفرق المتوالية.

مثلاً :

يمكننا أن نصل الى الحد الثاني (5) من خلال جمع الحد الأول ومرة واحدة فرق المتوالية.

$$a_2 = a_1 + 1*d = 1 + 1*4 = 5$$

يمكننا أن نصل الى الحد الرابع (13) من خلال جمع الحد الأول و3 مرات فرق المتوالية.

$$a_4 = a_1 + 3*d = 1 + 3*4 = 13$$

يمكننا أن نصل الى الحد السادس (21) من خلال جمع الحد الأول و5 مرات فرق المتوالية.

$$a_6 = a_1 + 5*d = 1 + 5*4 = 21$$

يمكننا أن نصل الى الحد الثامن (29) من خلال جمع الحد الأول و7 مرات فرق المتوالية.

$$a_8 = a_1 + 7*d = 1 + 7*4 = 29$$

في كل مرة اردنا الوصول الى حد معين،

جمعنا الحد الأول وعدد معين من المرات من فرق المتوالية.

كيف نعرف كم عدد المرات من فرق المتوالية (d) يجب أن نجمعها مع الحد الأول (a_1)؟

حسب مكان الحد الذي نبحث عنه، ناقص واحد.

مثلاً

- اذا اردنا أن نجد الحد ال-7، علينا أن نجمع الحد الأول و6 مرات فرق المتوالية.
- اذا اردنا أن نجد الحد ال-12، علينا أن نجمع الحد الأول و11 مرة فرق المتوالية.
- اذا اردنا أن نجد الحد ال-20، علينا أن نجمع الحد الأول و19 مرات فرق المتوالية.
- اذا اردنا أن نجد الحد ال-25، علينا أن نجمع الحد الأول و24 مرة فرق المتوالية.

مثال:

$$a_{23} = a_1 + 22d$$

$$a_{27} = a_1 + 26d$$

$$a_{67} = a_1 + 66d$$

تمارين:

$a_2 =$

$a_6 =$

$a_9 =$

$a_{14} =$

حلول:

1. $a_1 + d$
2. $a_1 + 5d$
3. $a_1 + 8d$
4. $a_1 + 13d$

الآن ، سننتقل إلى الموضوع الرئيسي لهذا الفصل.

كيف نعرف اي الأعداد يجب إضافتها، بين أعداد معطاة، للحصول على متوالية حسابية؟

فقط نحافظ على قوانين المتوالية الحسابية.

مثلاً:

1. معطى العددان 1 و-7. ادخلوا بين العددين، عددين اضافيين بحيث نحصل على متوالية حسابية.

1 , _____ , _____, 7

اذا كانت هذه متوالية حسابية، اذن فإن 1 هو الحد الأول و7 هو الحد الرابع.

ولذلك:

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$7 = 1 + 3d$$

$$6 = 3d$$

$$3d = 6$$

$$d = 2$$

الان نعرف أن فرق المتوالية هو 2، ونستطيع اكمال الحدود الناقصة.

2. معطى العددان 20 و – 48. ادخلوا بين العددين، ثلاثة أعداد اضافية بحيث نحصل على متوالية حسابية.

20 , _____ , _____, _____, 48

اذا كانت هذه متوالية حسابية، اذن فإن 20 هو الحد الأول و – 48 هو الحد الخامس.

ولذلك:

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$48 = 20 + 4d$$

$$28 = 4d$$

$$4d = 28$$

$$d = 7$$

الان نعرف أن فرق المتوالية هو 7, ونستطيع اكمال الحدود الناقصة.

تمارين:

1. معطى العددان 3 و-8. ادخلوا بين العددين اربعة أعداد اضافية بحيث تكوّن الاعداد الستة متوالية حسابية.

2. معطى العددان 10 و-70. ادخلوا بين العددين خمسة أعداد اضافية بحيث تكوّن الاعداد السبعة متوالية حسابية

3. معطى العددان 26 و-70. ادخلوا بين العددين ثلاثة أعداد اضافية بحيث تكوّن الأعداد الخمسة متوالية حسابية

حلول:

1. 3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8

2. 10 ,20 ,30 ,40 ,50 ,60, 70

3. 26 ,37 ,48 ,59 ,70

7. اختبار

1. يوجد في متوالية حسابية 12 حداً. الحد السادس هو 7، والحد الثامن هو 13.
   أ. جد فرق المتوالية.
   ب.جد الحد الأول في المتوالية
   ج. جد مجموع المتوالية

2. يوجد في متوالية حسابية 16 حداً. الحد الثالث هو 8. فرق المتوالية هو 2.
   أ. جد الحد ال 12 في المتوالية.
   ب.جد الحد ال 16 في المتوالية.
   ج. احسب مجموع الحدود الخمسة الأخيرة في المتوالية.

3. معطى حدان في متوالية حسابية: $a_3=73,\ a_4=77$
   أ. جد فرق المتوالية
   ب. جد الحد الأول في المتوالية.
   ج.101 هو حد في المتوالية. ما هو مكانه في المتوالية؟

4. معطى العددان 27 و-69. ادخلوا بين العددين خمسة أعداد اضافية بحيث تكوّن الأعداد السبعة متوالية حسابية.

حلول:

1. (أ) $d = 3$ (ب) $a_1 = -8$ (ج) $S_{12} = 102$
2. (أ) $a_{12} = 26$ (ب) $a_{16} = 34$ (ج) 150
3. (أ) $d = 4$ (ب) $a_1 = 65$ (ج) $n = 10$
4. 27 ,34 ,41 ,48 ,55 ,62, 69

8. مسائل كلامية في موضوع المتواليات الحسابية

نحل كل تمارين المسائل الكلامية في موضوع المتواليات الحسابية بنفس الطريقة بالضبط،

مع جميع الأدوات التي تعلمناها حتى الآن (الفصول 1-6)

كي حل هذه الأنواع من التمارين، سوف نعرض المسألة الكلامية كمتوالية حسابية.

مثال:

1. يكسب عامل هاي-تك 20000 شيكل شهريًا. اشتكى الموظف مؤخرًا إلى مديره من انخفاض أجره (مقارنةً بالعمل الشاق الذي يستثمره).

قرر المدير ، نظرًا لحيوية الموظف ، أنه بدءًا من شهر شباط ، سيتم إضافة 1000 شيكل إضافي للموظف لكل شهر (في شباط سيحصل على 21000 ، في اذار سيحصل على 22000 وهكذا).

أ. كم سيكسب العامل في شهر اب؟

ب. احسبوا كم سيكسب الموظف في اربعة الشهور الاتية (أيلول-كانون الأول)

حل:

أولاً، سنعرض المعطيات كمتوالية حسابية.

الحد الأول هو 20,000 ₪ وفرق المتوالية هو 1,000 ₪. يوجد لدينا 12 حداً.

لذلك:

20,000, 21,000, 22,000, 23,000, 24,000, 25,000, 26,000, 27,000, 28,000, 29,000, 30,000, 31,000

بعد عرض المسألة الكلامية كمتوالية حسابية – يمكننا أن نحل.

أ. في شهر اب (الحد الثامن في المتوالية). يكسب الموظف 26,000 ₪

ب. نحصل على أجور اربعة الشهور الأخيرة بواسطة جمع اربعة الحدود الأخيرة

يكسب الموظف 118,000 ₪

2. قرر موسى ان يبدأ الركض للحفاظ على صحته.

في اليوم الأول ركض 4 كم، وفي كل يوم ركض 2 كم أكثر من اليوم السابق.

أ. كم كيلومتر ركض في اليوم السابع؟

ب. كم كيلومتر ركض موسى خلال الأيام العشرة الأولى؟

حل:

أولاً، سنعرض المعطيات كمتوالية حسابية.

الحد الأول هو 4 كم وفرق المتوالية هو 2 كم.

لذلك:

4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22

بعد عرض المسألة الكلامية كمتوالية حسابية – يمكننا أن نحل.

أ. يمكننا أن نرى أن الحد السابع هو 16 (يمثل عدد الكيلومترات التى ركضها موسى في اليوم السابع).

ب. نجمع عشرة الحدود في المتوالية

$4+6+8+10+12+14+16+18+20+22 = 130$

اكتشفنا أن موسى ركض 130 كم في الأيام العشرة الأولى.

3. في قاعة سينما 8 سطور من الكراسي. في السطر الأول يوجد 5 كراسي، وعدد الكراسي في كل سطر أكبر بـ 3 من عدد الكراسي التي في السطر الذي قبله.

أ. ما هو عدد كراسي في السطر السادس؟

ب. ما هو عدد كراسي القاعة؟

حل:

أولاً، سنعرض المعطيات كمتوالية حسابية.

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

الحد الأول = عدد الكراسي في السطر الأول

الحد الثاني = عدد الكراسي في السطر الثاني

وهكذا...

بعد عرض المسألة الكلامية كمتوالية حسابية – يمكننا أن نحل.

أ. يوجد في السطر السادس 20 كرسياً.

ب. نجمع كل حدود المتوالية:

5+8+11+14+17+20+23+26 = 124

اكتشفنا أنه يوجد 124 كرسياً في القاعة

4. في سُلم مكوّن من 5 درجات، كل درجة أقصر بـ 2 سم من الدرجة التي تحتها.

طول الدرجة السفلى 10 سم.

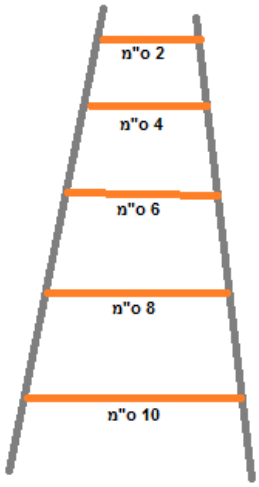
أ. احسبوا طول الدرجة الثانية من الأسفل.

ب.احسبوا طول الدرجة الثانية من الأعلى.

حل:

أولاً، سنعرض المعطيات كمتوالية حسابية.

10, 8, 6, 4, 2



بعد عرض المسألة الكلامية كمتوالية حسابية – يمكننا أن نحل.

أ. طول الدرجة الثانية من الأسفل هو 8 سم

ب. طول الدرجة الثانية من الأعلى هو 4 سم

تمارين:

1. كان الراتب الابتدائي لعامل 3500 شاقل في الشهر. يزداد راتبه في كل شهر بـ 50 شاقلاً.
   أ. كم كان راتب العامل في الشهر الـ 12 من عمله؟
   ب. كم تقاضى العامل خلال الـ 12 شهرًا الأولى من عمله؟

2. في سُلم مكوّن من 10 درجات، كل درجة أقصر بـ 4 سم من الدرجة التي تحتها.
   طول الدرجة السفلى 60 سم.
   أ. احسبوا طول الدرجة الخامسة من الأسفل.
   ب. احسبوا طول الدرجة الخامسة من الأعلى.

3. تدرّب داوود لسباق الدراجات الهوائية. في اليوم الأول قَطَع 25 كم، وفي كل يوم قَطَع مسافة 3 كم أكثر مما قَطَع في اليوم السابق.
   أ. كم كيلومترًا قَطَع داوود في اليوم ال- 30؟
   ب. كم كيلومترًا قَطَع داوود في الأيام ال- 30 الأولى من تدرّبه؟

4. في قاعة 15 سطرًا من الكراسي. يوجد في السطر الأول 12 كرسيًا، وعدد الكراسي في كل سطر أكبر بـ 2 من عدد الكراسي التي في السطر الذي قبله.
   أ. ما هو عدد كراسي القاعة؟
   ب. ما هو عدد الكراسي في السطر السابع؟

حلول:

1. (أ) 4050 شاقل (ب) 45,300 شاقل
2. (أ) 44 سم (ب) 40 سم
3. (أ) كم $a_{30} = 112$ (ب) كم $S_{30} = 2,055$
4. (أ) 390 كرسي (ب) $a_7 = 24$

9. امتحان نهائي

1. في متوالية حسابية 20 حدًا. الحد الثالث في المتوالية هو 8. فرق المتوالية هو 3.
   أ. احسب الحد السادس عشر في المتوالية.
   ب. احسب الحد العشرين في المتوالية.
   ج. احسب مجموع الحدود الخمسة الأخيرة في المتوالية.

2. معطى العددان 26 وَ 74. يجب ادخال خمسة أعداد إضافية بين هذين العددين، بحيث تكوّن الأعداد السبعة متوالية حسابية. جد الأعداد الخمسة التي يجب إدخالها بين العددين. اشرح كيف وجدت فرق المتوالية.

3. في سُلم مكوّن من 10 درجات، كل درجة أقصر بـ 4 سم من الدرجة التي تحتها. طول الدرجة السفلى 50 سم.
   أ. احسبوا طول الدرجة الخامسة من الأسفل.
   ب. احسبوا طول الدرجة الخامسة من الأعلى.

4. في قاعة 15 سطرًا من الكراسي. عدد الكراسي في كل سطر أكبر بـ 3 من عدد الكراسي التي في السطر الذي قبله. يوجد في السطر الأول 14 كرسيًا.
   أ. ما هو عدد الكراسي في السطر ال-15؟
   ب. ما هو عدد كراسي القاعة؟

5. الحد الثالث في متوالية حسابية هو 6، والحد الخامس هو 10.
   أ. جد فرق المتوالية
   ب. جد الحد الأول في المتوالية
   ج.. يوجد في هذه المتوالية 13 حداً. جد مجموع حدود المتوالية.

6. معطى ثلاثة حدود متتالية لمتوالية حسابية: $0, 7, 14, \ldots$

أ. جد الموقع التسلسلي للعدد 77 في هذه المتوالية.

ب. هل يوجد في هذه المتوالية حد قيمته 53؟

7. في متوالية حسابية الحد السادس هو 40 والثامن 46.

أ. جد قيمة الحد الأول في هذه المتوالية.

ب. جد حاصل مجموع الحدود الخمسة الأولى في هذه المتوالية.

حلول:

1. (أ) $a_{16} = 47$ (ب) $a_{20} = 59$ (ج) 265
2. 74, 66, 58, 50, 42, 34, 26
3. (أ) 34 سم (ب) 30 سم
4. (أ) $a_{15} = 56$ (ب) 525
5. (أ) $d = 2$ (ب) $a_1 = 2$ (ج) 182
6. (א) $a_{12}=77$ (ב) לא
7. (א) $a_1 = 25$ (ב) $S_5 = 155$